هم کلاسی

Hamkelasi.ir

جزوه آموزشی

آمار و احتمال

یازدهم ریاضی

کاری از استاد بابالویان

پاییز ۹۶

فصل اول :مبانی ریاضیات

درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

درس دوم : مجموعه و زیر مجموعه

درس سوم : اعمال روی مجوعه ها و جبر مجموعه ها

درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

استدلال :

یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات استدلال) و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل می شود .

مثال : اعداد اول بزرگ تر از یک فرد هستند.

a عدد اول بزرگ تر از یک است .

نتیجه : a عدد فرد است .

گزاره :

یک جمله خبری که می تواند دارای ارزش درست (T) یا نادرست (F) باشد را گزاره می نامند .گزاره ها را معمولاً با نماد p ، q یا r ..... نمایش می دهند .

مثال : جمله « هوا خوب است » یا « حافظ بهترین شاعر است » گزاره نیستند زیرا اولی خبری نیست و دومی دارای ارزش مشخص درست یا نادرست نیست .

گزاره نما :

اگر جمله خبری دارای متغیر باشد که با جایگذاری عدد به جای متغیر به گزاره تبدیل شود آن را گزاره نما می گویند .

مجموعه عضو هایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها گزاره نما به گزاره تبدیل می شود را دامنه گزاره نما می گویند و با D نمایش می دهند و زیر مجموعه ای از دامنه که به ازای آن ها گزاره درست ایجاد می شود را مجموعه جواب گزاره نما می گویند و با S نمایش می دهند ($S \subseteq D$)

مثال : جمله « p عددی فرد است » یک گزاره نما است . دامنه آن تمام اعداد طبیعی و مجموعه جواب آن تمام اعداد اول است .

تمرین : مجموعه جواب گزاره $\{x \in R \mid x^{۲} - ٤x = ٥\}$ را بیابید .

نقیض گزاره :

اگر p یک گزاره باشد نقیض آن ، گزاره ای است که ارزش آن درست عکس ارزش p باشد .

نقیض گزاره p با $\sim p$ نمایش داده می شود .

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : نقیض گزاره « اعداد صحیح گویا هستند » گزاره « اعداد صحیح گویا نیستند » می باشد .

توجه : اگر دو گزاره هم ارزش باشند می گوییم هم ارز منطقی هستند مثل p و $\sim(\sim p)$ و می نویسیم $\sim(\sim p) \equiv p$

ترکیب فصلی :

اگر بین دو گزاره حرف ربط « یا » باشد، ترکیب فصلی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \vee q$ نمایش داده می شود و علامت « $\vee$ » را رابط فاصل می گویند .

ارزش یک ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد .

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : برای هر دو عدد حقیقی a و b زمانی حاصل ضرب صفر است که a یا b صفر باشد .

$$a,b \in R \quad ; \quad a \times b = ۰ \Rightarrow a = ۰ \vee b = ۰$$

ترکیب عطفی :

اگر بین دو گزاره حرف ربط « و » باشد، ترکیب عطفی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می شود و علامت « $\wedge$ » را رابط عاطف می گویند .

ارزش یک ترکیب عطفی زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشد .

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال : برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b زمانی حاصل جمع صفر است که a و b هر دو صفر باشند .

$$a,b \in R \,, a,b > ۰ \quad ; \quad a + b = ۰ \Rightarrow a = ۰ \wedge b = ۰$$

تمرین : فرض کنید محمد به دانشگاه می رود(p) و رضا مکانیک (q) است . ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید .

الف) محمد به دانشگاه می رود یا رضا مکانیک است .

ب) محمد به دانشگاه می رود یا رضا مکانیک است .

ج) محمد به دانشگاه نمی رود و رضا مکانیک است .

د) محمد به دانشگاه نمی رود یا رضا مکانیک نیست .

ه) محمد به دانشگاه نمی رود و رضا مکانیک نیست .

و) $p \wedge \sim q$

قوانین دمورگان : $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

به کمک جداول زیر درستی قوانین دمورگان را نشان دهید .

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

ترکیب شرطی :

اگر p و q دو گزاره ساده باشند ترکیب « اگر p آنگاه q » یک ترکیب شرطی است و به صورت « $p \Rightarrow q$ » نوشته می شود که p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می گویند .

ارزش یک ترکیب شرطی زمانی نادرست است که فر ض درست ولی حکم نادرست باشد .

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

برای درک بهتر به این مثال توجه کنید :

فردا دربی هستش و دوستت میگه اگر تو بری استادیوم منم میام .حالا بگو تو کدوم حالت دوستت زده زیر حرفش :

الف) تو میری اونم میره . ب) تو میری اون نمیره .

ج) تو نمیری اونم میره . د) تو نمیری اون میره . (نگفته بود نری نمیرما!!!)

تمرین : ترکیب « اگر ۲ فرد باشد ، آنگاه ۵>۲ است » به انتفای مقدم .... است.

تمرین : به کمک جدول زیر نشان دهید $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$

تمرین : بدون کمک جدول ارزش ها نشان دهید .

الف) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

تمرین : ترکیب $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض $p \Rightarrow q$ می گویند نشان دهید $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

تمرین : عکس نقیض گزاره « اگر تو بری ورزشگاه منم میرم » را بنویسید .

تمرین : اگر a صحیح باشد ثابت کنید اگر $a^۲$ فرد باشد ، آنگاه a فرد است .

تمرین : نشان دهید ترکیب های $p \Rightarrow p \vee q$ و $p \wedge q \Rightarrow p$ همواره درست هستند ($(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ و ...)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow p \vee q$

ترکیب دو شرطی :

اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را که به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می دهند را ترکیب دو شرطی می نامند و معمولا را را به صورت « p اگر و تنها اگر q » می خوانند . (البته به صورت « p شرط لازم و کافی برای q است » نیز می خوانند)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

ارزش یک ترکیب دو شرطی زمانی ددرست است که فر ض و حکم هم ارزش باشند .

مثال : گزاره های« ۶ عدد اول است ⇔ ۵>۲ » و « مثلث متساویالساقین است ار و تنها اگر دو زاویه برابر داشته باشد »

نمونه ای از ترکیب دو شرطی هستند .

تمرین : شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه ای رو عمود منصف یک پاره خط باشد آن است که ....

قوانین هم ارزی های منطقی :

الف) قوانین جابجایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب) قوانین شرکت پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

ج) قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

د) قوانین دمورگان

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

ه) قوانین جذب

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

و) قانون تبدیل گزاره شرطی به فصلی

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

تمرین : قوانین فوق را به کمک جدول ارزش ها اثبات کنید .

سور ها :

به عبارت های « به ازای هر – به ازای جمیع مقادیر » و « وجود دارد – به ازای برخی مقادیر » سور گفته می شود که اولی سور عمومی و دومی سور وجودی نام دارد و به اختصار سور عمومی را با علامت $\forall$ و سور وجودی را با علامت $\exists$ نمایش می دهند . این عبارت ها می توانند قبل از گزاره نماها آمده و گزاره های درست یا نادرست بسازند .

(مجموعه اعداد زوج را با E و اعداد فرد را با O و اعداد اول را با P نمایش می دهیم)

تمرین : گزاره های زیر را به کمک نماد های $\forall$ و $\exists$ بنویسید .

الف) به ازای هر عدد طبیعی n ، ۲n زوج است .

ب) عددی صحیح وجود دارد که مربع آن به علاوه یک برابر صفر است .

ج) به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر ، حاصل ضرب آن عدد در معکوسش برابر یک است .

د) به ازای برخی مقادیر حقیقی داریم : $x^{۳}=۸x$

تمرین : عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد $\forall$ و $\exists$ بنویسید .

الف) $\exists x \in R;\quad x^{۲}+۱=۰$

ب) $\forall a \in E;\quad a=۲k, k \in O$

ج) $\forall p \in P;\quad p=۲k+۱, k \in Z$

د) $\exists b \in Z;\quad b(b+۱)=۲k, k \in Z$

تمرین : کدام گزاره ها درست و کدام یک نادرست است . در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید .

الف) $\forall x \in R;\quad |x|>۱$

ب) $\exists x \in R;\quad x^{۲}<x$

ج) $\exists x \in Z;\quad ۲x+۱=۲$

د) $\forall x \in N;\quad \frac{۴n+۶}{۲} \in O$

نقیض گزاره های سوری :

برای نوشتن نقیض یک گزاره سوری فقط منفی کردن فعل جمله کافی نیست به مثال زیر دقت کنید .

هر آسیایی ایرانی است (نادرست)   هر آسیایی ایرانی نیست (نادرست)

پس دو گزاره بالا که هم ارزش هستند نمی توانند نقیض هم باشند . ولی به گزاره های زیر دقت کنید :

هر آسیایی ایرانی است (نادرست)   بعضی از آسیایی ها ایرانی نیست (درست)

دو گزاره فوق نقیض هم هستند پس برای نقیض یک گزاره سوری باید هم سور و هم گزاره بعد آن نقیض شود .

توجه : نقیض سور عمومی ، سور وجودی است و برعکس .

$$\sim(\exists x\,;p(x)) \equiv \forall x\,;\sim p(x) \qquad \sim(\forall x\,;p(x)) \equiv \exists x\,;\sim p(x)$$

تمرین : ارزش گزاره های زیر را تعیین کرده سپس نقیض آنها را بنویسید .

الف) هر عدد فردی اول است .

ب) $\forall x \in R ; x + \frac{۱}{x} \geq ۲$

ج) عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن منفی است .

د) $\exists x \in R ; x + ۲ = ۳$

درس دوم : مجموعه و زیر مجموعه

سالهای قبل با مجموعه و زیر مجموعه و علامت های آن آشنا شدید در تمرینات زیر می خواهیم مروری بر گذشته داشته و آموخته هایمان را یاد آوری کنیم .

تمرین : اگر $A = \{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ کدام موارد درست کدام یک نادرست است ؟

الف) $\{a\} \in A$ ب) $\{a\} \subseteq A$ ج) $a \subseteq A$

د) $\{a,b\} \in A$ ه) $\{a,b\} \subseteq A$ و) $\{b\} \in A$

ز) $\varnothing \in A$ ح) $\varnothing \subseteq A$ ط) $\{\{a,b\}\} \subseteq A$

تمرین : کدام یک از مجموعه های زیر برابر تهی و کدام یک ناتهی اند ؟

الف) $\{x \in Z \mid ۲x - ۳ = ۴\}$ ب) $\{x \in N \mid x^۲ = x\}$

تمرین : مجموعه های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید .

الف) $A = \{x \in Z \mid |x| \leq ۲\}$

ب) $B = \{x \in R \mid x^۲ + x - ۶ = ۰\}$

ج) $C = \{x \in N \mid ۲x - ۳ \leq ۹\}$

تمرین : اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۲,۴,۶\}$ و $C=\{۲,۳,۵\}$ باشد مجموعه های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید .

الف) $A\cap B=$ ب) $B\cup C=$

ج) $A-C=$ د) $A-(B\cup C)=$

تمرین : تمام زیر مجموعه ای مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ را بنویسید .

تمرین : به کمک اصل ضرب نشان دهید *تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه **n** عضوی ، ۲^n است* .

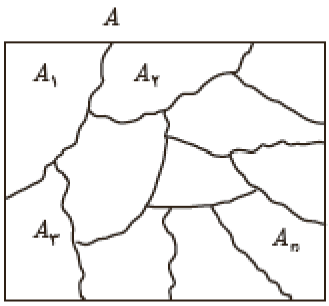
راهنمایی : یک مجموعه را فرض کنید حال اگر انگشت خود را روی یکی از اعضا بگذارید آیا مجموعه باقی مانده زیر مجموعه ی مجموعه قبل نیست ؟ آیا نمیتوان این کار را با هر یکی از اعضا یا چند عضو با هم انجام داد ؟ خوب پس چند زیر مجموعه با این روش می توان ساخت ؟

تمرین : اگر به یک مجموعه ۲ عضو اضافه کنیم به تعداد زیر مجموعه های آن ۹۶ واحد اضافه می شود . این مجموعه چند عضو دارد ؟

تمرین : اگر تعداد اعضای یک مجموعه را دو برابر کنیم تعداد زیر مجموعه های آن ۱۶ برابر می شود . تعداد اعضای اولیه این مجموعه چقدر بوده است ؟

افراز مجموعه :

اگر مجموعه A را به زیر مجموعه های ناتهی طوری تقسیم کنیم که هیچ دوتایی اشتراک نداشته باشند و اجتماع تمام آنها مجموعه A شود این زیر مجموعه ها را یک افراز مجموعه A می گویند .



$$\text{I)}\ \forall\ ۱ \le i \le n\,;\ A_i \neq \varnothing$$

$$\text{II)}\ \forall i, j\ (i \neq j\,;\ A_i \cap A_j = \varnothing)$$

$$\text{III)}\ A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$$

تمرین : مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳ ..., ۹\}$ را در نظر بگیرید . کدام یک از حلت های زیر یک افراز برای A محسوب می شود ؟

۱ $\{۱ ,۳ ,۵\}$ و $\{۲ ,۶\}$ و $\{۴ ,۸ ,۹\}$

۲ $\{۱ ,۳ ,۵\}$ و $\{۲ ,۴ ,۶ ,۸\}$ و $\{۵ ,۷ ,۹\}$

۳ $\{۱ ,۳ ,۵\}$ و $\{۲ ,۴ ,۶ ,۸\}$ و $\{۷ ,۹\}$

تمرین : تمام افراز های مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید .

تعریف به کمک نماد های ریاضی در مجموعه ها :

الف) $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

ب) $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

ج) $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

د) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,;(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ($A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,;(x \in A \wedge x \notin B)$)

نتیجه : هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای دو مجموعه در اختیار نباشند می توانیم عضو دلخواه مانند x را در A در نظر گرفته و نشان دهیم x عضو B نیز می باشد . از آنجایی که x دلخواه بود مشخص می شود هر عضو A در B قرار دارد .

تمرین : موارد زیر را اثبات کنید .(مانند نمونه)

الف) $A \subseteq B , B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$$\forall x ; x \in A \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \overset{B \subseteq C}{\Rightarrow} x \in C$$
$$\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in C) \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

ج) $A \subseteq A \bigcup B$

د) $A \bigcap B \subseteq A$

ه) $A - B \subseteq A$

ه) $A \subseteq B , C \subseteq D \Rightarrow A \bigcup C \subseteq B \bigcup D$

ز) $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \bigcup B \subseteq C$

ح) $C \subseteq A, C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \bigcap B$

تمرین : برای هر مجموعه دلخواه A ثابت کنید $\varnothing \subseteq A$.

راهنمایی : با نماد ریاضی آن چیزی که باید اثبات شود را بنویسید . ارزش این گزاره چیست ؟ چرا ؟

دو مجموعه مساوی :

دو مجموعه A و B را مساوی می گویند هر گاه هر عضو یکی از آنها عضو دیگری نیز باشد ، به عبارت دیگر $A \subseteq B, B \subseteq A$

و به صورت ریاضی می توان نوشت : $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

تمرین : کدام دو مجموعه با هم مساوی هستند ؟

الف) $A = \{x \in Z \mid ۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰\}$

ب) $B = \{x \in R \mid (x - ۱)(x^۲ + ۲) = ۰\}$

ج) $C = \{x \in N \mid |x| \leq ۱\}$

تمرین : ثابت کنید $A \bigcap B = B \bigcap A$ (خاصیت جابجایی)

تمرین : ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A - B = \varnothing$.

درس سوم : قوانین و اعمال بین مجموعه ها (جبر مجموعه ها)

مشابه قوانین گزاره های مرکب برای اعمال بین مجموعه های نیز قوانینی وجود دارد که همگی به راحتی به کمک هم ارزی های منطقی گزاره های مرکب قابل اثبات هستند .

قوانین اعمال بین مجموعه ها :

الف) قوانین جابجایی

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

ب) قوانین شرکت پذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ج) قوانین توزیع پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

د) قوانین دمورگان

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

ه) قوانین جذب

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

و)

$$A - B = A \cap B'$$

نا

$$A \cap A' = \varnothing \quad , \quad A \cup A' = U$$
$$A \cap U = A \quad , \quad A \cup U = U$$

اثبات ج قسمت اول :

تعریف اشتراک $A \cap (B \cup C) = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in (B \cup C)\}$

تعریف اجتماع $= \{x \in U \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$

توزیع پذیری « $\wedge$ » نسبت به « $\vee$ » $= \{x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$

تعریف اشتراک $= \{x \in U \mid x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\}$

تعریف اجتماع $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

تمرین : به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید.

الف) $(A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$

ب) $A \cup (B \cup A') = U$

پایان فصل اول